Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

2 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

$\forall u \in [0,1]$

$$\frac{u^{2n+1}}{\sqrt{u^2+1}} \geqslant 0$$

$u \longmapsto \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{u^2+1}}$ est continue sur $[0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{u^2+1}}\,du \geqslant 0$$

Donc

$$I_n \geqslant 0$$

par suite

$$1+u^2 \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+u^2} \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant 1$$

on $\forall x \in [0,1]$, $u^{2n+1} \geqslant 0$

$$\Rightarrow \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant u^{2n+1}$$

. les fonction $u \longmapsto \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

et $u \longmapsto u^{2n+1}$